2019年暑期学校测试题

1. (25分)用初等方法证明形如$4k+1$的素数有无穷多个, 其中k为正整数.

2. (25分)设$\mathbb{F}_q$是q元有限域, V是$\mathbb{F}_q$上的有限维线性空间, $\dim V \geq 2$. 证明

(1)不存在V的q个真子空间$W_i, 1 \leq i \leq q$, 使得$V = \cup_{i=1}^{q} W_i$,

(2)存在V的$(q+1)$个真子空间$W_i, 1 \leq i \leq q+1$, 使得$V = \cup_{i=1}^{q+1} W_i$.

3. (25分)设$\mathbb{E}^n$是n维欧氏空间, $m \leq n, v_0, v_1, \cdots, v_m$是$\mathbb{E}^n$中$(m+1)$个向量, 满足$(v_i, v_j) < 0, 0 \leq i \neq j \leq m$. 求证向量$v_1, \cdots, v_m$线性无关.

4. (25分)设正整数n的分拆集合为

$$\mathcal{P}(n) = \{(n_1, \cdots, n_k) \mid \sum_{i=1}^{k} n_i = n, n_1 \geq \cdots \geq n_k > 0\}.$$

定义$\mathcal{P}(n)$的子集

$$\mathcal{S}(n) = \{(n_1, \cdots, n_k) \in \mathcal{P}(n) \mid n_1 > \cdots > n_k > 0\},$$

$$\mathcal{T}(n) = \{(n_1, \cdots, n_k) \in \mathcal{P}(n) \mid \text{其中}n_i\text{都为奇数}\},$$

记$s(n) = \#\mathcal{S}(n), t(n) = \#\mathcal{T}(n)$. 求证: $s(n) = t(n)$.